Carlos Gomes
e
Isaque Tertuliano

Probabilidade de A a P

Probabilidade de A a P

Carlos A. Gomes e Isaque Tertuliano

18 de outubro de 2011

Capítulo 1

Um pouco da História da Probabilidade

1.1 Introdução

É cada vez mais comum nos dias atuais as pessoas pensarem, nem que seja de modo intuitivo, na idéia de probabilidade. Até para os leigos no assunto, isto é, pessoas que nunca estudaram o conceito e muito menos a teoria da probabilidade, parece ser de senso comum que existe um número, chamado de probabilidade, que de certa forma quantifica as chances de algum fato ocorrer. As pessoas pensam sobre quanto provável é acertar numa loteria, o quanto provável é chover num certo dia, o quanto provável é manter em alta os preços de determinadas ações de uma empresa, o quanto provável é que um determinado time de futebol seja classificado de uma fase para outra ou que seja campeão num determinado campeonato, o quanto provável é que uma determinada aplicação bancária seja rentável e apresente um risco pequeno, as empresas de seguros usam dados estatísticos para criar faixas de perfis de clientes de acordo com o risco que supostamente cada um oferece em relação as causas mais comuns de acidentes. Enfim, a idéia de probabilidade faz parte, de modo natural, do cotidiano de todas as pessoas, não só do estatístico ou do matemático probabilista.

O grande problema é: como obter de modo preciso esse número, chamado de probabilidade, de modo que ele seja verdadeiramente um indicador das chances de um determinado fato ou fenômeno ocorrer? Para responder essa questão, que é bastante delicada, vamos inicialmente contar um pouco da sobre o surgimento da idéia de probabilidade por volta do século XVI e em seguida dar uma visão histórica do desenvolvimento deste conceito até os dias atuais.

1.2 Antes de 1900

A origem da teoria das probabilidades data do meio do século XVII, apesar se serem encontrados registros sobre a idéia intuitiva de probabilidade em Cardano $(1501 - 1576)$, no seu livro *De Ludo Aleae*, nos trabalhos de Kepler $(1571 - 1630)$ e também em Galileu $(1564 - 1642)$. No ano de 1654, um jogador da sociedade parisiense, Chevalier de Mère, propôs a Blaise Pascal $(1623-1662)$ algumas questões sobre possibilidades de vencer em jogos.Uma questão foi: Um jogo de dados entre dois adversários chega ao fim quando um dos jogadores vence três partidas em primeiro lugar. Se esse jogo for interrompido antes do final, de que maneira cada um dos adversários deve ser indenizado?

Pascal escreveu a Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$ sobre esse problema, e a correspondência entre eles deu subsídios ao inicio da teoria das probabilidades. Assim, os primeiros passos sobre a toria das probabilidades foram dados principalmente com as idéias de Pierre de Fermat, Blaise Pascal , James Bernoulli e Christian Huygens.Conceitos importantes como probabilidade e esperança matemática foram sendo cristalizados através das correspondências trocadas entre Pascal e Fermat, ocasionada por problemas sobre apostas, que não se enquadravam nos escopos da Matemática daquele tempo.

Essa motivação inicial, os chamados jogos de azar, continuaram sendo por muito tempo a principal fonte de problemas de probabilidade. Com o passar do tempo a noção de probabilidade foi sendo aprimorada e foram naturalmente sendo descobertas novas aplicações por Moivre, Laplace, Gauss, Poisson, os Bernoulli entre muitos outros.

1.3 Após 1900

No início do século XX a teoria das probabilidades ganhou corpo a ponto de se transformar numa teoria rigorosa. O desenvolvimento moderno da teoria das probabilidades caracterizou-se pelo interesse por um crescimento da teoria em si, assim como na busca de novas aplicações. Essa nova fase contou com a contribução de matemáticos de diversos países com o destaque para os russos Tchebychev, Markov, Liapunov, Komolgorov , Alexander Khintchin e o françês Paul Lévy. As noções da teoria da medida e análise funcional conduziram a uma considerável extensão do conteúdo da teoria das probabilidades.Foi o eminente matemático russo A. Kolmogorov $(1903-1987)$ quem conectou as idéias de Emile Borel e Henri Lebesgue e a teoria da probabilidade e deu um tratamento rigoroso à essa teoria tendo agora como sustenteção a teoria da medida. Após o fundamental trabalho de Kolmogorov, por volta de 1930, o matemático francês Paul Lévy ($1886 - 1971$) introduziu um novo conceito dentro da teoria das probabilidade; **processo estocástico**. Assim nasceu a teoria dos processos estocásticos que se tornou uma área extremamente viva da pesquisa matemática e das aplicações práticas até os dias atuais.

Capítulo 2

A teoria clássica

2.1 Experimentos determinsticos $\times$ experimentos aleatórios

Diremos que um experimento é *deterministico* quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmete idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados de *experimentos aleatórios*. Fenômenos aleatórios são sempre presentes no nosso cotidiano; sorteios de loterias, previsão do tempo, aplicações financeiras com risco, bolsas de valores, etc.

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

O modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática. Mas todos os medelos tem ingredientes básicos comuns. O que vamos fazer agora é estudar esses ingredientes básicos, que constituem a chamada *Teoria Clássica da Probabilidade*.

2.2 Espaço amostral

Chamamos de *espaço amostral* ao conjunto cujos elementos são todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. De agora por diante usaremos a letra grega Ω para representar esse conjunto. Assim, por exemplo, no lançamento de uma moeda comum para observarmos a face que fica voltada para cima o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{C, K\}$, onde C representa o resultado cara enquanto o K representa o resultado coroa. No lançamento de um dado comum e na observação do número que fica exposta na face voltada para cima o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Note que nestes dois exemplos o espaço amostral é finito, o que nem sempre ocorre, por exemplo, se considerarmos o experimento de escolher aleatóriamente um número real no intervalo $[0, 1]$ o espaço amostral será $\Omega = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$, que evidentemente é um conjunto infinito.

Normalmente os elementos do espaço amostral são chamados de *pontos amostrais* ou simplesmente de *pontos*. Quando todos os pontos de um espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer dizemos que o espaço amostral é *equiprovável*.Por exemplo, quando um dado comum (honesto) é lançado e é observado o número que fica na face voltada para cima o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é equiprovável.

2.3 Eventos

Dado um espaço amostral Ω, chamamos de *evento* qualquer subconjunto de Ω. Assim ,por exemplo, no lançamento de um dado comum considere o evento ”ocorrência de número par”, $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

2.4 Definicão clássica de probabilidade

Dado um espaço amostral finito equiprovável Ω e um evento $A \subset \Omega$, definimos a probabilidade de ocorrência do evento A como sendo

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

que intuitivamente pode ser interpretado como

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

A partir dessa definição podemos extrair algumas consequências:

- Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\Omega) = 1$.

- $P(\phi) = 0$.
- Se $A \cap B = \phi$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2.5 Espaços de Probabilidade

Vamos introduzir agora a noção geral de probabilidade e provar várias propriedades que são mais ou menos imediatas da definição.

Definição. 2.5.1 *Sejam Ω um espaço amostral(conjunto) e P uma função definida para todos os subconjuntos de Ω (chamados eventos) é chamada uma probabilidade se*
$1)0 \leq P(A) \leq 1$, *para todo evento* $A \subset \Omega$.
$2)P(\Omega) = 1$.
$3)$ *Se* A *e* B *são eventos disjuntos (também chamados de mutuamente exclusivos),*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2.5.1 Propriedades da probabilidade

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

  De fato,

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

  De fato,

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(B) = P\left[A \cup (B - A)\right] \Rightarrow$$
$$P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(A) = P(B) - P(B - A) \leq P(B) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

  De fato,

$$A \cup B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(A \cup B) = P\left[A \cup (B - A)\right] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$$

$$B=(A\cap B)\cup(B-A)\Rightarrow P(B)=P\left[(A\cap B)\cup(B-A)\right]\Rightarrow P(B)=P(A\cap B)+P(B-A)$$

subtraindo membro a membro as duas igualdades $P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)$ e $P(B)=P(A\cap B)+P(B-A)$ obtemos:

$$P(A\cup B)=P(B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- $P(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n+1}.S_n$, onde

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

$$S_2=\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)$$

$$S_3=\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$

$$\vdots$$

$$S_n=P(A_1\cap A_2\cap\cdots A_n)$$

A demonstração dessa propriedade por der feita por indução sobre n.

Observação:

Note que sobre um mesmo espaço amostral Ω é possível definir muitas probabilidades diferentes. Assim, se Ω é finito, ou seja, $\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, uma probabilidade é uma função P tal que $0\leq P\left(\{x_i\}\right)\leq 1$ para $i=1,2,\cdots,n$ e

$$P\left(\{x_1\}\right)+P\left(\{x_2\}\right)+\cdots+P\left(\{x_n\}\right)=1$$

No caso em que o espaço é equiprovável temos:

$$P\left(\{x_1\}\right)=P\left(\{x_2\}\right)=\cdots=P\left(\{x_n\}\right)=p$$

e então

$$P\left(\{x_1\}\right)+P\left(\{x_2\}\right)+\cdots+P\left(\{x_n\}\right)=1\Rightarrow$$

$$\underbrace{p+p+\cdots+p=1}_{n\ \text{parcelas}}\Rightarrow np=1\Rightarrow p=\frac{1}{n}$$

Assim um fenômeno aleatório pode ser matematicamente modelado por um par de objetos: o espaço amostral Ω (conjunto de eventos elementares) e uma probabilidade P definida sobre os subconjuntos (eventos) de Ω. O Par (Ω, P) é chamado de *Espaço de probabilidade*.

Introduzimos a noção de espaço amostral como sendo um objeto univocamente determinado por um dado fenômeno aleatório. Isso não é estritamente certo, como podemos ver no seguinte exemplo: joguemos uma moeda duas vezes e observemos o número de caras obtidas.

Neste caso podemos representar o espaço amostral como

$$\Omega_1 = \{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\}$$

e P_1 a probabilidade que faz com que todos os eventos elementares(pontos de Ω_1) igualmente prováveis. Mas, como o que estamos observando neste experimento é o número de caras obtidas, poderíamos tomar como espaço amostral o conjunto $\Omega_2 = \{0,1,2\}$, correspondente a observar 0 caras, 1 cara ou 2 caras. Neste caso podemos definir sobre Ω_2 uma probabilidade P_2 como

$$\mathsf{P}_2(0) = \frac{1}{4}, \mathsf{P}_2(1) = \frac{1}{2} \text{ e } \mathsf{P}_2(2) = \frac{1}{4}$$

temos então dois espaços de probabilidade (Ω_1, P_1) e (Ω_2, P_2) que representam o mesmo fenômeno aleatório. E agora? qual espaço de propabilidade devemos usar? Há um melhor que o outro? A resposta é afirmativa; em geral escolhemos o espaço em que os eventos elementares sejam igualmente prováveis por que isso facilida os cálculos de quase todas as probabilidades além de não ferir a nossa intuição.

2.6 Probabilidade condicional

Definição. 2.6.1 *: Dados dois eventos A e B, de um espaço amostral Ω, a probabilidade condicional de B, dado que (sabendo que) o evento A já ocorreu é o número $\frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(A)}$. Representaremos esse número pelo símbolo $\mathsf{P}(B|A)$, ou seja,*

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(A)}$$

Evidentemente essa definição só faz sentido quando $P(A) > 0$. Além disso podemos escrever $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ como

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

no caso em que $P(B) > 0$ também podemos definir a probabilidade condicional de A dado que o evento B já ocorreu como sendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

que pode ser escrita como

$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$$

2.6.1 Propriedades da probabilidade condicional

Seja A um evento de um espaço amostral Ω, tal que $P(A) > 0$. Então:

- $P(\phi|A) = 0$.

  De fato,

  $$P(\phi|A) = \frac{P(\phi \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\phi)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

- $P(\Omega|A) = 1$.

  De fato,

  $$P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$.

  De fato,

  $$A \cap B \subset A \Rightarrow 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow$$

$$\frac{0}{P(A)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq \frac{P(A)}{P(A)} \Rightarrow 0 \leq P(B|A) \leq 1$$

- Quando $B \cap C = \phi$ temos $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$.

  De fato,

$$\begin{aligned} P(B \cup C|A) &= \frac{P\left[(B \cup C) \cap A\right]}{P(A)} \\ &= \frac{P\left[(B \cap A) \cup (C \cap A)\right]}{P(A)} \\ &= \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \\ &= P(B|A) + P(C|A) \end{aligned}$$

As propriedades acima nos diz que a probabilidade condicional é uma outra probabilidade sobre o espaço amostral Ω.

Proposição. 1 (Teorema do produto) *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos do espaço amostral Ω, então*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1 \cap A_2). \cdots .P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_{n-1})$$

Demonstração:

Vamos usar indução sobre n. Para $n = 2$, temos $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2|A_1)$, o que é evidentemente verdadeiro pela definição de probabilidade condicional. Agora suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n-1$ eventos (hipótese de indução), ou seja,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_{22}). \cdots .P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-2})$$

Agora vamos demonstrar que a propriedade é válida para n eventos. De fato,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n).P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \Rightarrow$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1 \cap A_2).\cdots.P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_{n-1})$$

2.7 Teorema de Bayes

Lema. 1 (Probabilidade total) *Sejam* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *eventos de um espaço amostral* Ω *que constituem uma partição de* Ω*, ,isto é,* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ *e* $A_j \cap A_j = \phi$ *quando* $i \neq j$*, ou seja, esses eventos são mutuamente exclusivos e a sua união é igual a* Ω*. Se* B *é um evento qualquer de* Ω *então*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).P(B|A_k)$$

Demonstração:

Como $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_i$ e

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$$

segue que

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).P(B|A_k)$$

Teorema. 1 (Teorema de Bayes) *Sejam* B *e* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *eventos de um espaço amostral* Ω *tal que* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *é uma partição de* Ω*, então para todo* $i = 1, 2, \cdots, n$ *tem-se*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k).P(B|A_k)}$$

Demonstração:

Pela definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Ora, $P(A_i \cap B) = P(A_i).P(B|A_i)$ além disso, como os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ constituem uma partição de Ω segue, pelai lei da probabilidade total, que

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).P(B|A_k)$$

Assim,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k).P(B|A_k)}$$

2.8 Eventos independentes

Vamos introduzir a noção de eventos independentes para dois eventos de um pesmo espaço amostral e em seguida extender a definição para um número qualquer de eventos.

Definição. 2.8.1 *Sejam* A *e* B *dois eventos de um mesmo espaço amostral* Ω*, dizemos que* A *e* B *são eventos independentes quando*

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Uma consequência imediata dessa definição é que o vazio ϕ e que o espaço amostral Ω são independentes de qualquer evento $A \subset \Omega$. De fato,

$$P(\phi \cap A) = P(\phi) = 0 = 0.P(A) = P(\phi).P(A)$$

$$P(\Omega \cap A) = P(A) = 1.P(A) = P(\Omega).P(A)$$

Um outro comentário que merece ser feito é que não devemos confundir **eventos mutuamente exclusivos** com **eventos independentes**. Dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω que sejam mutuamente exclusivos tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ **NUNCA** são independentes pois

$$P(A \cap B) = P(\phi) = 0 \text{ e } P(A).P(B) > 0$$

e portanto

$$0 = P(A \cap B) \neq P(A).P(B) > 0$$

Outra coisa que merece ser dita é que alguns autores definem dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω como sendo independentes quando $P(B|A) = P(B)$, o que o reflete o que a nossa intuição espera que o fato de A ter ocorrido não afete o valor da probabilidade de B, já que o evento B é independente do evento B. Além disso, como

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

do fato de que $P(B|A) = P(B)$,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

que acaba coincidindo com a definição que demos no início. Além disso, se o evento B é independente do evento A então nossa intruição espera que o evento A também seja independente do evento B. De fato, isso ocorre, como é verificado a seguir

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

A extensão da noção de independência para n eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de um mesmo espaço amostral Ω é feita naturalmente pensando no Teorema do produto. dizemos que os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são independentes se para toda escolha de um número arbitrário deles, a probabilidade de interseção é igual ao produto das probabulidades, ou seja, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são independentes se $\forall\ \ k$ e $\forall\ \ i_1, i_2, \cdots, i_k$ tem-se

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right).P\left(A_{i_2}\right).\cdots.P\left(A_{i_k}\right)$$

Diante disso perceba que para verificarmos que 2 eventos são independentes só devemos verificar uma igualdade. Para provarmos que 3 eventos são independentes temos que verificar 4 identidades. Em geral para provarmos que n eventos são independentes terwemos que verificar $2^n - n - 1$ identidades. (Note que $2^n - n - 1$ corresponde ao número de subconjuntos de um conjunto com 2 ou mais elementos de um subconjunto com n elementos). No caso de n conjuntos, com $n \geq 3$ não é suficiente verificar todas as identidades tomando os eventos de dois em dois, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo. 2.8.1 *Duas moedas comuns (honestas) são lançadas. Considerando os seguintes eventos:* $A_1 -$ *Cara no primeiro lançamento,* $A_2 -$ *Cara no segundo lançamento e* $A_3 -$ *Nos dois lançamentos ocorre a mesma face voltada para cima. Neste caso o espaço amostral é* $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$*, onde* C *designa cara e* K *coroa.*

Sendo a moeda honesta, cada ponto do espaço amostral tem probabilidade igual a $\frac{1}{4}$*. Além disso,*

$$A_1 = \{CC, CK\}, \quad A_2 = \{CC, KC\}, \quad A_3 = \{CC, KK\}$$

$$A_1 \cap A_2 = \{CC\}, \quad A_1 \cap A_3 = \{CC\}, \quad A_2 \cap A_3 = \{CC\} \quad e \quad a_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{CC\}$$

calculando-se as probabilidades desses eventos, obtemos:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \quad e \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

Assim,

$$\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).P(A_3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} = P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).P(A_3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

mas,

$$\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1).P(A_2).P(A_3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2.9 Variáveis Aleatórias

Definição. 2.9.1 *Uma variável aleatória é uma função* X *definida num espaço amostral, que assume valores reais.*

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de variáveis aleatórias. Deixamos a cargo do leitor especificar o espaço amostral em cada caso.

a)O número de peças defeituosas entre n peças retiradas numa linha de produção.
b)O número de veículos que passam por um posto de pedágio de uma determinada rodovia em uma hora.
c)O tempo, em horas, de vida de uma lâmpada até queimar.
d)O nível de água, em metros, de uma represa num dado instante.

Definição. 2.9.2 *As variáveis aleatórias que assumem valores num conjunto enumerável serão denominadas discretas e aquelas que assumem valores num subconjunto não enumerável da reta real serão denominadas contínuas*

Assim, por exemplo, a variável aleatória do exemplo (a) acima é discreta, enquanto que a do exemplo c é contínua.

Se X é uma variável aleatória discreta e $x_1, x_2, x_3 \cdots$ os valores que ela pode assumir, dispostos em ordem crescente de magnitude. Suponhamos também atribuídas a esses valores probabilidades dadas por

$$P(X = x_k) = f(x_k), \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

è conveniente introduzir aqui a *função de probabilidade*, também designada *distribuição de probabilidade*, dada por

$$P(X = x) = f(x)$$

De um modo geral, f é uma função de probabilidade se:
1)$f(x) \geq 0$.
2)$\sum_x f(x) = 1$. Além disso, também definimos a *Função de distribuição acumulada*, ou abreviadamente, **Função de distribuição**, de uma variável aleatória X como sendo a função F dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

Exemplo. 2.9.1 *Jogando-se uma moeda duas vezes, o espaço amostral*

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$$

Seja X o número de caras que aparecem. A cada ponto amostral podemos associar o número X tal como apresentamos na tabela abaixo:

Ponto amostral	*CC*	*CK*	*KC*	*KK*
X	2	1	1	0

supondo que a moeda é equilibrada(honesta) a distribuição de probabilidade da variável aleatória X é

X	2	1	0
$P\,(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

No caso em que X é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de X tomar um determinado valor é igual a zero. Não se pode, pois, definir uma função de probabilidade contínua da mesma maneira como fizemos no caso de uma variável aleatória discreta. Para chegarmos a uma definição de função densidade de probabilidade contínua, notemos que o que tem sentido é falar-se da probabilidade de X estar compreendido entre dois valores diferentes. Essas idéias nos levam a definir uma função densidade de probabilidade para uma variável aleatória contínua X como sendo uma função f tal que:

1)$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2)$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Neste caso a probabilidade de X estar entre a e b é dada por

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.10 Esperança Matemática

Definição. 2.10.1 *A esperança matemática (ou média) de uma variável aleatória discreta* X *que assume valores* $x_1, x_2, x_3, \cdots$*, com respectivas probabilidades* $P(X = x_i)$ *com* $i = 1, 2, 3, \cdots$ *é dada por*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.P(X = x_i)$$

No caso de uma variável aleatória contínua X, com função densidade de probabilidade f é dada por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Capítulo 3

Probabilidade $\times$ intuição

1. Numa urna A existem 100 bolas azuis e numa urna B existem 100 bolas brancas. Inicialmente João retira 20 bolas da urna A e transfere para a urna B. Neste momento as 120 bolas da urna B são misturadas e em seguinda João retira 20 bolas da urna B e transfere essas 20 bolas para a urna A. Ao final é mais provável encontrar uma bola azul na urna B ou uma bola branca na urna A?

2. Numa sala de aula com 25 alunos é mais provável haver ou não haver dois alunos que fazem aniversário no mesmo dia do ano?(Considere um ano com 365 dias).

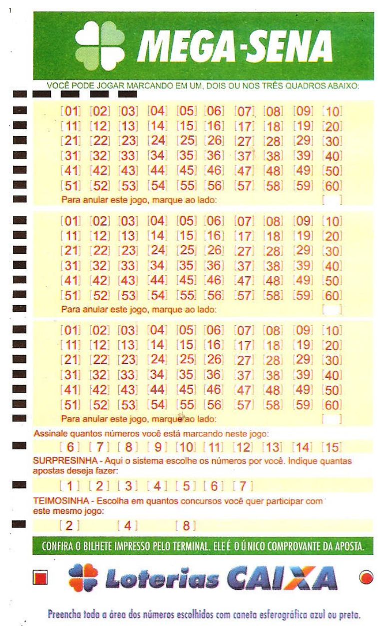
3. Um prisioneiro recebe 50 bolas brancas e 50 bolas pretas. O prisioneiro deve distribuir, do modo que preferir, as bolas em duas urnas, mas de modo que nenhuma das urnas fique vazia. As urnas serão embaralhadas e o prisioneiro deverá, de olhos fechados, escolher uma urna e, nesta urna, uma bola. Se a bola for branca, ele será libertado; caso contrário, ele será condenado. De que modo o prisioneiro deve distribuir as bolas nas urnas para que a probabilidade de ele ser libertado seja máxima? Qual é essa probabilidade?

4. Dois jogadores apostam R\$ $10,00$ cada um em um jogo de cara ou coroa, combinando que o primeiro a conseguir 6 vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem 5 vitórias e o outro tem 3. Qual a divisão justa da quantia apostada?

5. Uma pessoa compra um album com n lugares vazios onde devem ser colecionadas n figurinhas distintas. Se essa pessoa compra uma figurinha por dia, qual o tempo médio, em dias, necessário para o preenchimento desse album?

6. **(O problema da secretária desatenta)** Uma secretária ineficiente coloca n cartas distintas em n envelopes com endereços distintos. Determine a probabilidade de pelo menos uma carta chegar ao seu destino? Investigue os valoles dessa probabilidade para $n = 10, n = 100$ e $n = 1000$.

7. A MEGA-SENA consiste de um jogo promovido pela Caixa Econômica Fereral, onde um apostador, quando faz uma aposta simples, escolhe aleatoriamente 6 entre os números de 01 a 60. Conforme ilustra o cartão de apostas abaixo:



A cada sorteio, a Caixa Econômica Federal sorteia (aleatoriamente) 6 dos 60 números possíveis números. Diante do exposto, $\binom{60}{6} = 50.063.860$ possibilidades de sorteio. Acertar a sena com uma única aposta simples seria tão difícil quanto apostar que num lançamento de N moedas honestas uma pessoa apostase que TODAS sairiam com CARA voltadas para cima. Qual o valor de N para que esses probabilidades sejam praticamente iguais?

8. O trecho a seguir foi obtido em um site da internet que se propõe a aumentar as suas chances de vitória no jogo da Mega-sena. *"Quando afirmamos, por exemplo, que dezenas atrazadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes,*

portanto seria útil voc e acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentanto muito suas chances."

Você concorda que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Mega-sena?

9. Um outro fato muito curioso sobre a Mega-sena é o seguinte: Segundo as regras do jogo estabelecidas pela Caixa Econômica Federal, a cada sorteio são sorteados 6 entre os números de 1 a 60 e nas casas lotérias qualquer apostador pode marcar num mesmo cartão de 6 a 15 números. Sendo que uma aposta de 6 números é chamada de aposta simples e uma de 15 números de aposta máxima. Os valores cobrados para cada uma das possíveis apostas são exibidos na tabela a seguir

Aposta	6	7	8	9	10	$\cdots$	15
R\$	$2,00$	$14,00$	$56,00$	$168,00$	$420,00$	$\cdots$	$10.010,00$

Você poderia explicar o porquê dessa tabela aparentemente estranha?

10. Suponhamos que você tenha duas escolhas para apostar na Mega-sena. Na primeira escolha aposta nas dezenas $1-3-5-7-9-11$ e na segunda escolha nas dezenas $8-17-31-45-49-55$. Qual você acha que tem maiores chancer de ser uma aposta vitoriosa?

11. Há alguns anos cada prova objetiva da UFRN possuia 15 questões cada uma, onde apenas uma delas é a correta. Compare a probabilidade de alguém acertar, no chute, as 15 questões de uma dessas provas com a probalididade de alguém acertar, com uma aposta simples, a sena no jogo da mega sena.

12. Após passar por diversas etapas em um progama de auditório, Larissa foi convidada para sortear o seu prêmio (um carro zero quilômetro). O sorteio é realizado com uma roleta circular, dividida em 6 setores de mesma área: três estão marcados como "CARRO", dois como "PERDE"e um como "GIRE NOVAMENTE". Para descobrir qual prêmio ganhará, Larissa deve girar a roleta. Se a roleta parar em "CARRO", Larissa ganha o carro, se ela parar em "PERDE", Larissa volta para sem nada; se a roleta parar em "GIRE NOVAMENTE", ela deve girar a roleta outra vez (não há limite no número de repetições permitidas). Qual é a probabilidade de Larissa ganhar o carro?

13. (OMRN)Paulinho arremessa aleatoriamente uma moeda comum onde numa face possui "CARA"e na outra "COROA", por várias vezes. A cada lançamento

ele anota o resultado num papel e ele promete parar a brincadeira quando ocorrerem duas "CARAS"consecutivas. Qual a probabilidade de que Paulinho faça exatamente 10 lançamentos até parar?

14. **(O problema do bode)** Este problema foi proposto em um programa de rádio nos Estados Unidos e causou um enorme debate na internet.
    Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma dessas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não escolhidas pelo candidato, mostrando necessáriamente um bode. A seguir, ele pergunta se o candidato mantém a sua escolha ou se deseja trocar de porta. Pensando em maximizar as suas chances de ganhar o grande prêmio,o candidato deve torcar de porta ou não?

15. Selecionam-se ao acaso dois pontos num segmento de tamanho 1, dividindo-o em três partes. Determine a probabilidade de que se possa formar um triângulo com essas três partes.

16. Dois agentes secretos têm um encontro marcado para um certo dia de outubro na praça vermelha. Com receio de uma possível atuação da contra-espionagem, tomaram as seguintes medidas de precaução:

    - Cada um deles chega à praça num momento escolhido ao acaso entre o meio dia e uma hora da tarde.
    - Nenhum deles espera mais de 15 minutos pelo outro.

    Qual a probabilidade de o encontro realmente se efetuar?

17. **(Vitórias sucessivas)**
    Para encorajar a carreira promissora de tênis de Elmer, seu pai oferece a ele um prêmio caso ele ganhe (no mínimo) dois "sets"de tênis numa disputa de uma série de três sets para ser jogada com seu pai e o campeão do clube alternadamente: pai-campeão-pai ou campeão-pai-campeão, de acordo com a escolha de Elmer. O campeão é um jogados melhor que o pai de Elmer. Quais as séries que Elmer escolheria?

18. **(O Jurado petulante)**
    Um júri de três homens tem dois membros cada qual independentemente tem

a probabilidade p de tomar a decisão correta e um terceiro membro que joga uma moeda para cada decisão (regras majoritárias). Um júri composto por um homem tem a probabilidade p de tomar a decisão correta. Qual dos dois júris tem uma melhor probabilidade de tomar a decisão correta?

19. **(O dilema do Prisioneiro)** Três prisioneiros, A, B e C, com registros aparentemente tão bom terem aplicado para a liberdade condicional. A comissão de liberdade condicional decidiu libertar dois dos três, e os prisioneiros sabem disso, mas não que dois.Um amigo guarda do prisioneiro A sabe que estão a ser liberado.O prisioneiro A percebe que seria antiético perguntar ao guarda se ele, está para ser lançado, mas pensa em pedir o nome de um outro prisioneiro de si mesmo que está para ser lançado. Ele pensa que, antes que ele pede, as chances de liberação são $2/3$. Ele acha que se o guarda diz que "B"será libertado ", o seu próprio já descera para $1/2$,porque A ou B ou B ou C devem ser liberados. E assim A decidir não reduzir suas chances de perguntar.No entanto , A está errado em seus cálculos.Explique.

20. Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

21. Você sabia??
Considere um bilhão de números distintos escritos cada um em um de um bilhão de papeizinhos (haja papel!) em um chapéu. Você deve retirar um papel de cada vez. Você deve dizer que você encontrou o maior de todos os números, logo após retirá-lo. Não vale dizer que um outro número que você já tinha retirado antes é o maior!
A probabilidade de você acertar sua afirmativa parece muito pequena, não? Você sabia que você pode adotar uma estratégia de modo que a probabilidade de acertar seja maior que 1/3? Você deve descartar os primeiros s números, onde s é aproximadamente $\frac{n}{e}$ ($e = 2,71828$ é a constante de Euler), e em seguida, escolher o próximo número que for maior que todos os anteriores. Você tem probabilidade muito próxima de $\frac{1}{e}$ de acertar!

Um problema semelhante foi proposto na lista de discussão da OBM:
Um inspetor sabe que o chefe de 5 bandidos é o mais baixinho de todos e que todas as alturas são diferentes. Sabe-se também que eles estarão presentes numa reunião em um edifício, num intervalo de 15 minutos. Como o inspetor não sabe qual dos bandidos é o mais baixo, decide deixar sair os dois primeiros bandidos e prender o primeiro dos seguintes que seja mais baixo de todos

que saírem. Qual a probabilidade de o inspetor prender a pessoa certa? A probabilidade de acertar é alta (maior que 30%). Calcule-a!

22. Suponha que a ocorrência ou não de chuva dependa das condições do tempo no dia imediatamente anterior. Admita-se que se chove hoje, choverá amanhã com probabilidade $0,70$ e que se não chove hoje choverá amanhã com probabilidade $0,40$. sabendo-se que choveu hoje, calcule a probabilidade de que choverá depois de amanhã.

23. Pedro quer enviar uma carta a Marina. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é $0,80$. A probabilidade de que o correio não a parca é de $0,90$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $0,90$. Dado que Marina não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?

24. Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de $0,30$. O Fluminense ganha um jogo em um dia com chuva com probabilidade $0,40$; em um dia sem chuva com probabilidade $0,60$. Se ganhou um jogo em novembro, qual a probabilidade de que tenha chovido neste dia?

25. **(O problema da namorada desconfiada)**João e José disputam um jogo com uma moeda equilibrada. Cada jogador lança a moeda duas vezes e vence o jogo aquele que obtiver dois resultados iguais. João começa jogando e, se não vencer, passa a moeda para José e, continuam assim, alternando as jogadas, até alguém vencer. A namorada de José desconfia da honestidade do jogo e reclama que João tem mais probabilidade de vitória por iniciar o jogo. Por outro lado a namorada de João diz que isso é besteira pois, como o número de jogadas pode ser infinito, tanto faz quem começa jogando. Quem tem razão? Justifique!

26. **(Probabilidade de ouro)**numa determinada partida um jogador de basquete tem direito a executar um lance livre, que quando convertido soma no placar 1 ponto. Se convertê-lo ele terá direito a mais um (apenas um!) lance livre. Qual a probabilidade de que ele converta um lance livre sabendo que uma vez marcado o lance livre a probabilidade de que ele atinja 2 pontos é a mesma de que ele não marque nenhum ponto?

27. Um amigo me presenteou com 10.000 bilhetes distintos de uma loteria (onde concorriam 40.000 bilhetes) que em todo sorteio semanal era sorteado um único número de 1 a 40.000. Ao me presentear ele me avisou que eu precisava ir à

casa lotérica para confirmar a aposta com um carimbo no verso de cada bilhete que eu quisesse que concorresse naquela semana. Além disso ele me avisou que os meus 10.000 bilhetes valeriam no máximo duas semanas consecutivas (dois sorteios). Com base nestas informações determine:

a)Como eu devo distribuir os meus 10.000 bilhetes, em no máximo dois sorteios, para que a minha probabilidade de ser sorteado em até duas semanas consecutivas seja máxima? Qual o valor dessa probabilidade máxima?

b)Como eu devo distribuir os meus 10.000 bilhetes ,em no máximo dois sorteios,para que a minha probabilidade de ser sorteado em até duas semanas consecutivas seja mínima? Qual o valor dessa probabilidade mínima?

28. Em um teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é p. Havendo m escolhas, se ele sabe a resposta ele responde corrretamente com probabilidade 1; se não sabe ele responde corretamente com probabilidade $\frac{1}{m}$. Qual a probabilidade que ele sabia a resposta dado que a pergunta foi respondida corretamente? Calcule o limite dessa probabilidade quando (i) $m \to \infty$ com p fixo e (ii)$p \to 0$ com m fixo.

Capítulo 4

Alguns problemas interessantes

1. Se um números $n \in \mathbb{N}$ é tal que $1 \leq n \leq 1000$ é escolhido aleatóriamente, qual a probabilidade de que $\ell og_2(n)$ seja inteiro?

2. Débora tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ela escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. se no dia primeiro de Agosto ela usou o magenta, qual a probabilidade de que no dia 31 ela volte a usar o magenta?

3. **(Meias numa gaveta)**
   Uma gaveta contém meias pretas e meias vermelhas. Quando duas meias são retiradas aleatoriamente, a probabilidade que ambas sejam vermelhas é $\frac{1}{2}$.

   a)Qual o número mínimo de meias que estão presentes na gaveta?

   b)Qual o menor número de meias presentes na gaveta, se o número de meias pretas é par?

4. **(Tentativas até o primeiro sucesso)**
   Em média, quantas vezes um dado deve ser jogado até que apareça um 6?

5. **(A moeda no quadrado)**
   Num jogo comum de carnaval, um jogador arremessa uma moedinha de uma distância de aproximadamente 5 pés na superfície de uma mesa cheia de quadrados de 1 polegada. Se a moedinha ($3/4$ de polegada de diâmetro) cair completamente dentro de um quadrado, o jogador recebe 5 centavos mas não ganha a moeda de volta; caso contrário, ele perde sua moeda. Se a moeda cair sobre a mesa, qual é a chance do jogador ganhar?

6. **(Tirada de sorte)**
   Uma tirada de sorte é um jogo de azar sempre jogado em carnavais e casas de jogos. Um jogados pode apostar em qualquer número entre 1 a 6. Três dados são rolados. Se o número do jogador aparecer em um, dois ou nos três dados, ele recebe respectivamente um, dois ou três vezes sua aposta inicial mais seu próprio dinheiro de volta; caso contrário, ele perde sua aposta. Qual é a expectativa de perder do jogado por aposta? (Na verdade, o jogador pode distribuir as apostas em vários números, mas cada aposta pode ser considerada como uma tentativa.)

7. **(Cooperação silenciosa)**
   Dois estranhos são separadamente solicitados a escolher um dos números inteiros positivos e avisou que, se ambos escolherem o mesmo número, ambos recebem um prêmio, se você fosse uma dessas pessoas, o número que você escolheria?

8. **(Coletando Cupons)**
   Cupons nas caixas do cereal são numerados de 1 a 5, e um conjunto de um de cada um é necessário para um prêmio. Com um cupom por caixa, quantas caixas, em média, são obrigadas a fazer um jogo completo?

9. **(A fila do teatro)**
   Oito solteiros e sete belas modelos acontecem aleatoriamente ter comprado um único assento na linha 15 do mesmo banco de um teatro. Em média, quantos pares de assentos adjacentes são ocupados por casais casar?

10. **(Um empate jogando em moeda)**
    Quando 100 moedas são lançadas, qual é a probabilidade de que exatamente 50 são caras ?

11. **(Os comprimentos das cordas aleatórias)**
    Se uma corda é selecionada aleatoriamente em um círculo fixo, que é a probabilidade de que o seu comprimento exceder o raio do círculo?

12. **(Feriados de aniversário)**
    Leis trabalhistas em Erewhon exigem donos de fábricas para dar a cada trabalhador um feriado sempre que um deles tem um aniversário e contratar sem discriminação em razão de aniversários. Exceto para essas férias que trabalhar um ano de 365 dias. Os proprietários querem maximizar o número esperado total de dias homem trabalhado por ano é uma fábrica de. quantos trabalhadores fazem fábricas é Erewhon?

13. **(O penhasco)**
Mr. M está a um passo em direção ao penhasco. Ele toma passos aleatórios, para perto ou para longe do penhasco. Em qualquer etapa a sua probabilidade de dar um passo para longe do penhasco é $2/3$, e de dar um passo em direção ao penhasco $1/3$.Qual é a sua chance de escapar do precipício?

14. **(Ruína do jogador)**
O jogador M tem um real, e o jogador N tem 2 reais. Em cada jogo perdido, um jogador dá um real para o outro. M jogador é melhor do que o jogador N e ganha $2/3$ dos jogos. O jogo segue até que um está deles esteja falido. qual é a chance que M pode ganhar?

15. **(A moeda de espessura)**
Qual a espessura de uma moeda para ter uma chance $1/3$ cair em pé quando for lançada aleatóriamente?

16. **(Quebrando um palito)**
a)se um palito é quebrado em dois ao acaso qual é a comprimento médio da parte menor?
b)(Para alunos de cálculo.) qual é a proporção média do comprimento menor para o maior?

17. **(A barra quebrada)**
Uma barra é quebrado de forma aleatória em dois lugares. Encontrar o tamanho médio dos menores, do tamanho médio, e das maiores peças?

18. **(Equações quadráticas aleatórias)**
Qual é a probabilidade de que a equação quadrática $x^2 + 2bx + c = 0$ tenha raízes reais?

19. **(Passeio aleatório bidimensional)**
A partir de uma origem 0, a partícula tem uma chance de 50% de mover um passo para o norte ou sul um passo, e também uma chance de 50% de mover um passo leste ou oeste um passo. Após a etapa na tomada, o movimento é repetido a partir da nova posição e assim indefinidamente. Qual é a chance que a partícula retorna à origem?

20. (OBM)Há 1002 balas de banana e 1002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Seja p a probabilidade de as duas balas serem do mesmo sabor e seja q a probabilidade de as duas balas serem de sabores diferentes. Quanto vale a diferença entre p e q?

21. (OBM)Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

22. Considere o conjunto A dos pares ordenados (x, y) de reais não negativos tais que $x+y = 2$. Se a probabilidade de um elemento de A escolhido aleatoriamente estar a uma distância da origem menor ou igual a $5/3$ é p, quanto vale p?

23. Selecionam-se 3 vértices de um cubo. Qual é a probabilidade de eles pertencerem a uma mesma face?

24. Prove que, pelo menos para 30% dos naturais n entre 1 e $1.000.000$, o primeiro dígito de 2^n é 1.

25. (OBM)Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

26. (OBM)Prove que é possível decompor o conjunto $1, 2, 3 \cdots, 2^n$ em dois subconjuntos A e B não contendo nenhuma progressão aritmética de tamanho $2n$.

27. (OBM)Um quadrado de lado 3 é dividido em 9 quadrados de lado unitário, formando um quadriculado. Cada quadrado unitário é pintado de azul ou vermelho. Cada cor tem probabilidade $1/2$ de ser escolhida e a cor de cada quadrado é escolhida independentemente das demais. Qual a probabilidade de obtermos, após colorirmos todos os quadrados unitários, um quadrado de lado 2 pintado inteiramente de uma mesma cor?

28. Um coelho está numa rua infinita dividida em quadrados numerados pelos inteiros, e começa no quadrado 0. Se num dado momento ele está no quadrado k, ele escolhe, com probabilidade $1/2$, pular para o quadrado $k + 2$ ou, também com probabilidade $1/2$, pular para o quadrado $k - 1$. Ele continua esse processo indefinidamante. Dado $m \in \mathbb{N}$,determine a probabilidade de, em algum momento, o coelho pisar no quadrado m.

29. (OBM)No programa de auditório Toto Bola, o apresentador Ciço Magallanes dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da platéia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. A máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro é igual a m/n , em que m e n são inteiros positivos primos entre si. Determine o valor de $m + n$.

30. A Inês está apaixonada por um belo rapaz e quer desesperadamente saber se irá casar com ele. Resolveu por isso, consultar a conhecida astróloga Bety Xamax que prevê o futuro errando apenas uma em cada 4. Oh, alegria! A Astróloga disse que sim.
No entanto, a Inês não ficou descansada. Decidiu também ir ao famoso vidente Dr. Magix que, nas suas previsões, só se engana uma vez em cada 5. Oh, desgraça! O vidente disse que não.
Com tudo isso, que probabilidade tem Inês de se casar com seu apaixonado?

31. (ESPANHA 2000) A figura mostra um plano com mas que delimitam 12 quadras quadrados. Uma pessoa P caminha de A até B e outra Q caminha de B até A. Ambas partem ao mesmo tempo seguindo caminhos de comprimento mínimo com a mesma velocidade constante. Em cada ponto com duas possíveis direções a tomar, ambas possuem a mesma probabilidade. determine a probabilidade de que P e Q se cruzem.