GRUPOS DE ISOMETRIAS

1 Introdução

Quando estudamos certos tipos de estrututras (algébricas, topológicas, métricas, etc.) estamos particularmente interessados nas simetrias, que são aplicações bijetoras que "preservam a estrutura". Ferramentas de natureza algébrica são largamente utilizadas no estudo de simetrias, uma vez que o conceito de grupo aparece naturalmente neste estudo. Temos, por exemplo, os grupos de automorfismos, para estruturas algébricas, os grupos de homeomorfismos, para espaços topológicos, e os grupos de isometrias, para espaços métricos. Como a idéia de simetria aparece em vários ramos da ciência, o seu estudo é algo de grande importância.

Sendo M um espaço métrico, define-se uma isometria de M como sendo uma bijeção de M em M que preserva distância. Observa-se facilmente que a composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria ainda são isometrias, e assim o conjunto das isometrias de M, munido da operação de composição de funções, é um grupo. Surge portanto o conceito de grupo de isometrias de um espaço métrico

Neste minicurso faremos um estudo introdutório da idéia de grupo de isometrias, através de uma abordagem algébrica. Começaremos relembrando os conceito de espaço métrico e isometria, e depois definiremos grupo de isometrias e apresentaremos propriedades básicas e alguns exemplos importantes. Nesses exemplos veremos a aplicação de técnicas algébricas básicas e o conceito de produto semidireto de grupos. Por fim, veremos a idéia de isometria de um espaço vetorial munido de uma forma bilinear.

2 Espaços métricos e isometrias

Definição 2.1 *Definimos um espaço métrico como sendo um par* (M, d)*, onde* M *é um conjunto não vazio e* $d : M \times M \longrightarrow I\!R$ *é uma aplicação que satisfaz as seguintes condições:*
i) $d(x, y) \geq 0$ *para quaisquer* x*,* $y \in M$*;*
ii) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$*;*
iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *para quaisquer* x*,* $y \in M$*;*
iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para quaisquer* x*,* y*,* $z \in M$ *(desigualdade triangular).*

Sendo M um conjunto não vazio, uma aplicação $d : M \times M \longrightarrow I\!R$ que satisfaz as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da definição acima é dita ser uma *métrica em* M. Assim, um espaço métrico é um conjunto (não vazio) munido de uma métrica. Vamos denotar (M, d) simplesmente por M, ficando a métrica subentendida.

Exemplo 2.2 Considerando a aplicação $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = |x - y|$ temos que d é uma métrica, chamada de métrica usual de $\mathbb{R}$. Estabelecendo-se uma correspondência biunívoca entre os número reais e os pontos de uma reta, temos que $d(x, y)$ é exatamente a distância entre os pontos correspondentes aos números reais x e y.

Exemplo 2.3 Considere o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. A aplicação $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

é uma métrica, chamada de métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Considerando num plano um sistema de coordenadas cartesianas (ou seja, interpretando o $\mathbb{R}^2$ como um plano), temos que $d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ é exatamente a distância entre os pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$.

Exemplo 2.4 Dado M um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos, fixemos $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e consideremos a aplicação $d_\lambda : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = y \\ \lambda & , \text{ se } x \neq y \end{cases} .$$

Temos que d_λ é uma métrica em M.

Exemplo 2.5 Sejam A um anel comutativo com unidade e $\mathfrak{m}$ um ideal de A tal que $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k$ (vamos convencionar que $\mathfrak{m}^0 = A$). Para cada $a \in A - \{0\}$, tomemos $v_\mathfrak{m}(a) = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a \in \mathfrak{m}^k\}$ (onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$). Considere agora a aplicação $d_\mathfrak{m} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$d_\mathfrak{m}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = y \\ \exp(v_\mathfrak{m}(x - y)) & , \text{ se } x \neq y \end{cases} .$$

Temos que $d_\mathfrak{m}$ é uma métrica em A, chamada de *métrica* $\mathfrak{m}$*-ádica.*

Exemplo 2.6 Sejam M um espaço métrico e d a sua métrica. Se S é um subconjunto não vazio de M, temos que a restrição de $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ ao conjunto $S \times S$ é uma métrica em S, chamada de *métrica de S induzida por d.* Dizemos então que S, munido desta métrica induzida, é um *subespaço métrico* de M.

Definição 2.7 *Sejam M um espaço métrico e X um subconjunto não vazio de M. Dizemos que X é um subconjunto limitado se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer x, $y \in X$. Neste caso definimos o diâmetro de X, denotado por $diam(X)$, como sendo*

$$diam(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

Definição 2.8 *Sejam M e M_1 espaços métricos (denote suas métricas por d e d_1, respectivamente. Sendo $f : M \longrightarrow M_1$ uma função, dizemos que f é:*
a) Contínua em $x_0 \in M$ se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x \in M$ e $d(x, x_0) < \delta$ tem-se $d_1(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
b) f é uma função contínua se é contínua em todo $x \in M$
c) f é uma imersão isométrica se $d_1(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer x, $y \in M$.

Costumamos dizer que imersões isométricas são aplicações que "preservam distância". Não é difícil ver que toda imersão isométrica é uma função contínua e injetora. Definimos uma *isometria* como sendo uma imersão isométrica sobrejetora. Assim, uma isometria é uma bijeção que preserva distância. Quando existe alguma isometria entre dois espaços métricos, dizemos que esses espaços são *isométricos.*

Neste trabalho estamos particularmente interessados em isometrias de um espaço métrico nele mesmo. Sendo M um espaço métrico, chamaremos uma isometria $f : M \longrightarrow M$ simplesmente de *isometria de M*. Vamos denotar por $Isom(M)$ o conjunto de todas as isometrias do espaço métrico M.

Exemplo 2.9 Sendo M um espaço métrico é fácil ver que a aplicação identidade de M é uma isometria. Assim, o conjunto $Isom(M)$ nunca é vazio. Veremos exemplos de espaços métricos cuja única isometria é a identidade, e de espaços métricos que possuem outras isometrias além da identidade.

Exemplo 2.10 Considere o espaço métrico (M, d_λ), onde d_λ é a métrica definida no Exemplo 2.4. Dados $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação bijetora qualquer e x, $y \in M$, distintos, observe que $f(x) \neq f(y)$ e assim $d_\lambda(f(x), f(y)) = \lambda = d_\lambda(x, y)$. Logo, f é uma isometria e daí concluímos que $Isom(M, d_\lambda) = S_M$.

Por outro lado, considere M um espaço métrico tal que toda bijeção de M em M (permutação de M) é uma isometria do espaço métrico M. Dados x_1, x_2, y_1, $y_2 \in M$, com $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, sabe-se que existe $f \in S_M$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como f é uma isometria, temos $d(x_2, y_2) = d(f(x_1), f(y_1)) = d(x_1, y_1)$. Segue então que deve existir $\lambda \in I\!R - \{0\}$ tal que $d = d_\lambda$.

Exemplo 2.11 Sejam M um conjunto finito qualquer com pelo menos 3 elementos e $\delta : M \times M \longrightarrow I\!R$ uma aplicação qualquer satisfazendo as seguintes condições:
i) $\delta(x, x) = 0$ e $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ para quaisquer x, $y \in M$;
ii) $1/2 \leq \delta(x, y) \leq 1$ para quaisquer x, $y \in M$ distintos;
iii) Se x_1, x_2, y_1, $y_2 \in M$, com $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$ e $\{x_1, y_1\} \neq \{x_2, y_2\}$, então $\delta(x_1, y_1) \neq \delta(x_2, y_2)$.

Não é difícil ver que δ é uma métrica. Observe que a desigualdade triangular (condição (iv) da Definição 2.1) é consequência da condição (ii) acima.

Provemos agora que $Isom(M, \delta) = \{Id_M\}$. De fato, supondo, por contradição, $Id_M \neq f \in Isom(M)$, tomemos $x \in M$ tal que $y = f(x) \neq x$. Como $\delta(f(x), f(y)) = \delta(x, y)$, segue da condição (iii) acima que $f(y) = x$. Tomando agora $z \in M - \{x, y\}$, temos que $\delta(x, z) = \delta(f(x), f(z)) = \delta(y, f(z))$ e, novamente pela condição (iii), $\{x, z\} = \{y, f(z)\}$, o que é uma contradição, pois $y \neq x$ e $y \neq z$. Logo, devemos ter $Isom(M, \delta) = \{Id_M\}$.

Exemplo 2.12 Considere o conjunto $I\!R$ munido de sua métrica usual (veja o Exemplo 2.2). Sendo $a \in I\!R$ e $n = \pm 1$, tomemos $f_{n,a} : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por $f_{n,a}(x) = nx + a$. É fácil ver que $f_{n,a} \in Isom(I\!R)$.

Por outro lado, considere $f \in Isom(I\!R)$ e $a = f(0)$. Temos então que $|f(x) - a| = |x|$ e consequentemente $f(x) = \pm x + a$ para cada $x \in I\!R$. Supondo que existem x_1, $x_2 \in I\!R - \{0\}$ tais que $f(x_1) = x_1 + a$ e $f(x_2) = -x_2 + a$, temos que $|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2|$, o que não pode acontecer, uma vez que x_1 e x_2 são ambos não nulos. Logo, devemos ter $f(x) = x + a$ para todo $x \in I\!R$, ou $f(x) = -x + a$ para todo $x \in I\!R$. Segue então que $Isom(I\!R) = \{f_{n,a} \mid n = \pm 1,\ a \in I\!R\}$.

Exemplo 2.13 Considere A um anel comutativo com unidade, $\mathfrak{m}$ um ideal prórpio de A e $d_{\mathfrak{m}}$ a métrica definida no Exemplo 2.5. Para cada $a \in A$, considere a aplicação $f_a : A \longrightarrow A$ definida por $f_a(x) = x + a$ para todo $x \in A$. Para cada $a \in U(A)$ (conjunto dos elementos (multiplicativamente) inversíveis de A), considere a aplicação $g_a : A \longrightarrow A$ definida por $g_a(x) = ax$ para todo $x \in A$. Não é difícil ver que $f_a \in Isom(A, d_{\mathfrak{m}})$, para todo $a \in A$, e que $g_a \in Isom(A, d_{\mathfrak{m}})$, para todo $a \in U(A)$.

3 Grupos, subgrupos e produto semidireto

A partir desta seção, é necessário que o leitor conheça os conceitos de grupo, homomorfismo e isomorfismo de grupos, e esteja familiarizado com suas notações e propriedades básicas. Sendo G um grupo recordemos que um *subgrupo* de G é um subconjunto não vazio H de G tal que xy, $x^{-1} \in H$ (ou $x + y$, $-x \in H$, se o grupo G tiver notação aditiva) para quaisquer x, $y \in H$. Observemos que nestas condições H é por si um grupo, cuja operação é a operação de G (restrita a H). Dizemos que H é um *subgrupo normal* de G se $g^{-1}hg \in H$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$.

Neste trabalho, os grupos lineares serão particularmente de grande importância. Sendo V um espaço vetorial, considere o conjunto $GL(V)$ de todas as transformações lineares $T : V \longrightarrow V$ (operadores lineares sobre V) bijetoras. É um fato bem conhecido da Álgebra Linear que se T, $S \in GL(V)$, então $T \circ S$ e T^{-1} também pertencem a $GL(V)$. Logo, $GL(V)$, munido da composição de funções, é um grupo, chamado de *grupo linear sobre* V.

Dados $n \in \mathbb{N}$ e K um corpo, seja $GL_n(K)$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ inversíveis (determinante não nulo) com entradas em K. Observe que $GL_n(K)$ é fechado em relação ao produto de matrizes e, munido desta operação, é um grupo, chamado de *grupo linear de grau n sobre K*. É um fato bem conhecido que se V é um K-espaço vetorial de dimensão n, então $GL(V)$ é isomorfo a $GL_n(K)$.

Dizemos que uma matriz $A \in GL_n(K)$ é it ortogonal se $A^{-1} = A^t$. Denotando por $O_n(K)$ o conjunto de todas as matrizes ortogonais de $GL_n(K)$, observa-se que $I_n \in O_n(K)$ (onde I_n é a matriz identidade $n \times n$) e assim $O_n(K)$ é não vazio. Usando-se propriedades de matriz inversa e matriz transposta, mostra-se facilmente que $O_n(K)$ é fechado em relação ao produto e à inversão de matrizes. Logo, $O_n(K)$ é um subgrupo de $GL_n(K)$, chamado de *grupo ortogonal* de grau n sobre K.

Definição 3.1 *Sejam G um grupo e H e N subgrupos de G. Dizemos que G é o produto semidireto de N por H se $G = NH$, $H \cap N = \{e\}$ (onde e denota o elemento neutro do grupo G) e $N \trianglelefteq G$.*

Notações: $G = N \rtimes H$ e $G = H \ltimes N$.

Sendo G um grupo e H e N subgrupos de G tais que $G = N \rtimes H$, temos que cada elemento de G se escreve da forma nh, com $n \in N$ e $h \in h$. Ademais, esta expressão é única, pois se n, $n_1 \in N$ e h, $h_1 \in H$ são tais que $nh = n_1h_1$, então $n_1^{-1}n = h_1h^{-1}$ e daí $h_1h^{-1} \in H \cap N$. Segue então que $h_1 = h$ e assim $n_1 = n$.

Exemplo 3.2 Seja G um grupo abeliano. Considere o produto cartesiano $DG = \{1, -1\} \times G$ e a operação " $*$ " em DG definida por

$$(n, a) * (m, b) = (nm, b^n a).$$

Temos que DG, munido desta operação, é um grupo, cujo elemento neutro é $(1, e)$. Observe que se $(n, a) \in DG$, então $(n, a)^{-1} = (n, a^{-n})$.

Observe que $N = \{(1, a) \mid a \in G\}$ e $H = \{(1, e), (-1, e)\}$ são subgrupos de G. Ademais, N é isomorfo a G e $DG = N \rtimes H$.

Considerando agora M um espaço métrico e o conjunto $Isom(M)$ de todas as isometrias de M, já vimos na seção anterior que $Isom(M)$ é um conjunto não vazio. Ademais, como toda isometria é bijetora, temos que $Isom(M) \subseteq S_M$, onde S_M denota o grupo simétrico (ou grupo das permutações) sobre M. Sendo f, $f_1 \in Isom(M)$ temos que

$$d((f_1 \circ f)(x), (f_1 \circ f)(y)) = d(f_1(f(x)), f_1(f(y))) = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

para quaisquer x, $y \in M$, e assim $f_1 \circ f \in Isom(M)$. Ademais,

$$d(x, y) = d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$

para quaisquer x, $y \in M$, donde $f^{-1} \in Isom(M)$. Assim, $Isom(M)$ é um subgrupo de S_M, chamado de *grupo das isometrias do espaço métrico* M. Observe então que o grupo das isometrias de M é o conjunto $Isom(M)$ munido da composição de funções. Segue do Teorema de Lagrande que se M é finito com exatamente n elementos, então o número de isometrias de M é um divisor de $n!$.

Proposição 3.3 *Se M e M_1 são espaços métricos isométricos, então $Isom(M)$ e $Isom(M_1)$ são grupos isomorfos.*

Demonstração. Sendo M e M_1 espaços isométricos, tomemos $h : M \longrightarrow M_1$ uma isometria e definamos

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & Isom(M) & \longrightarrow & Isom(M_1) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = h \circ f \circ h^{-1} \end{array} .$$

Observando que a composta de isometrias e a inversa de uma isometria ainda são isometrias, não é difícil ver que φ é uma aplicação bem definida. Ademais, φ é isomorfismo de grupos. □

Exemplo 3.4 Sendo M um espaço métrico e X um subconjunto não vazio de M, temos que o conjunto $G = \{f \in Isom(M) \mid f(X) = X\}$ é um subgrupo de $Isom(M)$. Dizemos que G é o *subgrupo de $Isom(M)$ que preserva X.*

Exemplo 3.5 Considere o espaço métrico $M = \{x, y, z, t\}$, cuja métrica $d : M \times M \longrightarrow I\!R$ é definida por

$$d(x,x) = d(y,y) = d(z,z) = d(t,t) = 0 \quad , \quad d(x,y) = d(y,x) = d(z,t) = d(t,z) = 3 \quad ,$$

$$d(x,z) = d(z,x) = d(y,t) = d(t,y) = 4 \quad \text{e} \quad d(x,t) = d(t,x) = d(y,z) = d(z,y) = 5.$$

Observe que $Isom(M)$ é um grupo isomorfo ao grupo de Klein.

Exemplo 3.6 Considere o espaço métrico $I\!R$, cuja métrica é a usual. Sendo $(I\!R, +)$ o grupo aditivo dos reais, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & D(I\!R, +) & \longrightarrow & Isom(I\!R) \\ & (n,a) & \longmapsto & \varphi(n,a) = f_{n,a} \end{array}$$

é um homomorfismo injetivo de grupos. Além disso, do que foi visto no Exemplo 2.12 segue a sobrejetividade, e assim concluímos que φ é um isomorfismo.

4 Espaços vetoriais normados

Em toda esta seção, V denotará sempre um espaço vetorial real.

Definição 4.1 *Definimos uma norma em V como sendo uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \| \ \| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & v & \longmapsto & \|v\| \end{array}$$

que satisfaz:
a) Se $v \neq 0_V$, então $\|v\| \neq 0$.
b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para quaisquer $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para quaisquer u, $v \in V$ (desigualdade triangular).

Definimos um espaço vetorial normado como sendo um par $(V, \| \ \|)$, onde V é um espaço vetorial e $\| \ \|$ é uma norma em V. Em geral vamos denotar o espaço vetorial normado $(V, \| \ \|)$ simplesmente por V, ficando a norma subentendida.

Não é difícil ver que $\|0_V\| = 0$ e que $\| - v\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

Exemplo 4.2 Considerando o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \| \ \| : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & v = (x, y) & \longmapsto & \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

temos que $\| \ \|$ é uma norma, *chamada de norma usual de $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 4.3 Um *produto interno* em V é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} <,> : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & <u, v> \end{array}$$

que satisfaz:
i) $<u + v, w> = <u, w> + <v, w>$ para quaisquer u, v, $w \in V$;
ii) $<\lambda u, v> = \lambda <u, v>$ para quaisquer u, $v \in V$ e $\lambda \in K$;
iii) $<u, v> = <v, u>$ para quaisquer u, $v \in V$;
iv) $<u, u> > 0$ para todo $u \neq 0_V$.

Sendo $<,> : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em V, definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \| \ \| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & v & \longmapsto & \|v\| = \sqrt{<v, v>} \end{array} .$$

Usando propriedades de produto interno, mostra-se facilmente que $\| \ \|$ é uma norma em V, chamada de *norma proveniente do produto interno* $<,>$. Não é difícil ver que

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

para quaisquer u, $v \in V$, sendo esta igualdade chamada de *Lei do Paralelogramo*. No próximo exemplo veremos uma norma que não é proveniente de nenhum produto interno.

Exemplo 4.4 Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ e a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \| \ \|_s : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & v=(x,y) & \longmapsto & \|v\|_s = |x|+|y| \end{array} .$$

Temos que esta aplicação é uma norma em $\mathbb{R}^2$ e que não é proveniente de nenhum produto interno. Para verificar isto, basta ver que $\| \ \|_s$ não satisfaz a Lei do Paralelogramo. De fato, tomando $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (-1,1)$, verifica-se facilmente que $\|v_1+v_2\|^2 + \|v_1-v_2\|^2 \neq 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2$.

Considere V um espaço vetorial normado. Definindo

$$\begin{array}{rccl} d: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & d(u,v)=\|u-v\| \end{array} ,$$

temos que d é uma métrica em V, chamada de *métrica induzida pela norma* $\| \ \|$. Segue então que todo espaço vetorial normado é naturalmente um espaço métrico.

Observe que nem toda métrica definida em algum espaço vetorial é induzida por alguma norma. A métrica d_λ do Exemplo 2.4 (considerando $M = V$ espaço vetorial) não é induzida por nenhuma norma. Não é difícil de verificar que uma condição necessária e suficiente para que uma métrica d em V seja induzida por uma norma é que $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$ e $d(u,v) = d(u+w, v+w)$ para quaisquer u, v, $w \in V$ e $\lambda \in K$.

Vamos agora estudar as isometrias dos espaços vetoriais normados.

Proposição 4.5 *Sejam V um espaço vetorial normado e $f: V \longrightarrow V$ uma aplicação linear. Então valem:*
a) f é uma isometria se, e somente se, $\|f(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.
b) Se $\| \ \|$ é proveniente de um produto interno, então f é uma isometria se, e somente se, $<f(u), f(v)> = <u,v>$ para quaisquer u, $v \in V$.

Demonstração. a) Supondo f uma isometria, como $f(0_V) = 0_V$ temos

$$\|f(v)\| = d(f(v), f(0_V)) = d(v, 0_V) = \|v\|$$

para todo $v \in V$. Reciprocamente, supondo $\|f(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$, temos

$$d(f(u), f(v)) = \|f(u) - f(v)\| = \|f(u-v)\| = \|u - v\| = d(u,v)$$

para quaisquer u, $v \in V$. Logo, f é uma isometria.
b) Supondo $< f(u), f(v) > = < u, v >$ para quaisquer u, $v \in V$, temos particularmente $\|f(v)\|^2 = < f(v), f(v) > = < v, v > = \|v\|^2$ e assim segue, pelo ítem (a), que f é uma isometria. Reciprocamente, supondo que f é uma isometria, temos $\|f(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$, ou seja, $<f(u+v), f(u+v)> = <u+v, u+v>$ para quaisquer u, $v \in V$. Assim,

$$\|f(u)\|^2 + 2 <f(u), f(v)> + \|f(v)\|^2 = \|u\|^2 + 2 <u,v> + \|v\|^2,$$

donde $<f(u), f(v)> = <u, v>$, uma vez que $\|f(v)\| = \|v\|$ e $\|f(u)\| = \|u\|$. □

Exemplo 4.6 Sejam V um espaço vetorial normado e d a métrica induzida pela norma de V. Para cada $v_0 \in V$, consideremos a aplicação $T_{v_0} : V \longrightarrow V$, definida por $T_{v_0}(u) = u + v_0$ para todo $u \in V$. Observe que T_{v_0} é bijetora e que

$$d(T_{v_0}(u), T_{v_0}(v)) = \|T_{v_0}(u) - T_{v_0}(v)\| = \|u + v_0 - (v + v_0)\| = \|u - v\| = d(u,v)$$

para quaisquer u, $v \in V$, e assim $T_{v_0} \in Isom(V)$. T_{v_0} é chamada de *translação por* v_0.

Proposição 4.7 *Sejam V um espaço vetorial normado e X um subconjunto não vazio e limitado de V. Se f é uma translação de V tal que $f(X) = X$, então $f = Id_V$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que $f \neq Id_V$, ou seja, que existe, $u_0 \in V - \{0_V\}$ tal que $f(v) = v + u_0$ para todo $v \in V$. Fixemos $x_0 \in X$ e consideremos o conjunto $X_{u_0} = \{t \in I\!R \mid x_0 + tu_0 \in X\}$. Como X é limitado, temos X_{u_0} deve ser limitado. Sendo $a = \sup X_{u_0}$, tomemos $t \in X_{u_0}$ tal que $a - 1/2 < t_1 \leq a$. Como $f(X) = X$, temos

$$x_0 + (t_1 + 1)u_0 = f(x_0 + t_1 u_0) \in X$$

e daí $t_1 + 1 \in X_{u_0}$, o que é um absurdo, pois $t_1 + 1 > a$. Temos então o resultado. □

Sendo V um espaço vetorial normado, considere o subconjunto $\mathcal{T}(V)$ de todas as translações de V. Para quaiquer u, $v \in V$, temos que $T_u \circ T_v = T_{u+v}$ e $T_u^{-1} = T_{-u}$, donde $\mathcal{T}(V)$ é um subgrupo de $Isom(V)$, chamado de *grupo das translações de* V. Ademais, se $f \in Isom(V)$, então $f^{-1} \circ T_u \circ f = T_{f^{-1}(u)}$, e assim $\mathcal{T}(V)$ é um subgrupo normal de $Isom(V)$. Observe que, sendo $(V, +)$ o grupo aditivo do espaço vetorial V, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & (V,+) & \longrightarrow & \mathcal{T}(V) \\ & u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos.

Consideremos agora $\mathcal{IL}(V) = \{f \in Isom(V) \mid f \text{ é linear}\}$. Observando que a composta de duas transformações lineares e a inversa de uma transformação linear (bijetora) são ainda transformações lineares, concluímos que $\mathcal{IL}(V)$ é um subgrupo de $Isom(V)$, chamado de *grupo das isometrias lineares de* V. Observe que se $f \in \mathcal{IL}(V)$, então $f(0_V) = 0_V$, donde segue que $\mathcal{IL}(V) \cap \mathcal{T}(V) = \{Id_V\}$, pois a única translação que fixa o vetor nulo é a identidade.

Veremos agora que a condição de fixar o vetor nulo caracteriza as isometrias lineares de um espaço vetorial normado.

Lema 4.8 *Sejam V um espaço vetorial real normado e $f : V \longrightarrow V$ uma função contínua tal que $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para quaisquer u, $v \in V$. Então f é uma transformação linear.*

Demonstração. Devemos apenas mostrar que $f(tv) = tf(v)$ para quaisquer $t \in I\!R$ e $v \in V$. Temos $f(0_V) + f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V)$ e assim $f(0_V) = 0_V$. Daí segue que se $v \in V$, então $0_V = f(v + (-v)) = f(v) + f(-v)$ e consequentemente $f(-v) = -f(v)$ para quaisquer $v \in V$. Usando a hipótese $f(u+v) = f(u)+f(v)$, a última igualdade e indução, concluímos que $f(nv) = nf(v)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Supondo agora m, $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$, temos $nf((m/n)v) = f(mv) = mf(v)$ e consequentemente $f(rv) = rf(v)$ para quaisquer $r \in \mathbb{Q}$ e $v \in V$.

Fixemos agora $v \in V$, arbitrário, e consideremos a aplicação $h_v : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por $h_v(t) = \|f(tv) - tf(v)\|$. Como f é contínua, temos que h_v é contínua. Ademais, $h_v(r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Segue então que h_v é constante igual a 0, uma vez que o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $I\!R$. Segue que $f(tv) = tf(v)$, o que conclui a demonstração, uma vez que v foi tomado arbitrário. $\square$

Teorema 4.9 (Mazur-Ulam) *Sejam V um espaço vetorial real normado e f uma isometria de V tal que $f(0_V) = 0_V$. Então f é linear.*

Demonstração. Fixados v_1, $v_2 \in v$, arbitrários, consideremos o conjunto

$$A_0 = A_0(v_1, v_2) = \{u \in V \mid \|v_1 - u\| = \|v_2 - u\| = (1/2)\|v_1 - v_2\|\}.$$

Tomando $v_0 = (1/2)(v_1+v_2)$, temos $v_1 - v_0 = v_2 - v_0 = (1/2)(v_1 - v_2)$ e assim $v_0 \in A$. Observe que para quaisquer u_1, $u_2 \in A_0$ temos

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - v_1\| + \|v_1 - u_2\| \leq \|v_1 - v_2\|,$$

e assim $diam(A_0) \leq \|v_1 - v_2\|$. Ademais, se $u \in A$, então $(2v_0 - u) - v_1 = v_2 - u$ e $(2v_0 - u) - v_2 = v_1 - u$, donde $2v_0 - u \in A_0$. Segue daí que $2\|v_0 - u\| = \|(2v_0 - u) - u\| \leq diam(A_0)$ e assim $\|v_0 - u\| \leq (1/2)diam(A_0)$. Definindo agora

$$A_1 = A_1(v_1, v_2) = \{w \in A_0 \mid \|w - u\| = (1/2)diam(A_0), \forall\ u \in A_0\}$$

observamos primeiramente que $A_1 \subseteq A_0$ e $v_0 \in A_1$. Ademais, tomando $w \in A_1$ e $u \in A_0$, arbitrários, como $(2v_0 - w) - u = (2v_0 - u) - w$, temos $\|(2v_0 - w) - u\| \leq (1/2)diam(A_0)$, uma vez que $2v_0 - u \in A_0$. Logo, $2v_0 - w \in A_1$.

Supondo agora w_1, $w_2 \in A_1$ temos que $\|w_1 - w_2\| \leq (1/2)diam(A_0)$, pois $\|w_1 - u\| \leq (1/2)diam(A_0)$ para todo $u \in A_0$, e $w_2 \in A_0$ (lembrando que $A_1 \subseteq A_0$). Logo, $diam(A_1) \leq (1/2)diam(A_0)$.

Consideremos agora

$$A_2 = A_2(v_1, v_2) = \{w \in A_1 \mid \|w - u\| = (1/2)diam(A_1), \forall\, u \in A_1\}.$$

É imediato que $A_2 \subseteq A_1$ e que $diam(A_2) \leq (1/2)diam(A_1)$, pois $\|w - w_1\| \leq (1/2)diam(A_1)$ para quaisquer $w \in A_2$ e $w_1 \in A_1$, particularmente se w_1 também pertence a A_2. Tomando agora $w \in A_2$ e $u \in A_1$, arbitrários, como $(2v_0 - w) - u = (2v_0 - u) - w$, temos $\|(2v_0 - w) - u\| \leq (1/2)diam(A_1)$, uma vez que $2v_0 - u \in A_1$. Logo, $2v_0 - w \in A_2$.

Seguindo com esta idéia e supondo já definido o conjunto $A_n = A_n(v_1, v_2)$, o qual satisfaz $A_n \subseteq A_{n-1}$, $v_0 \in A_n$, $diam(A_n) \leq (1/2)diam(A_{n-1})$ e $2v_0 - w \in A_n$ para todo $w \in A_n$, definimos

$$A_{n+1} = A_{n+1} = \{w \in A_n \mid \|w - u\| = (1/2)diam(A_n), \forall\, u \in A_n\}.$$

Claramente $A_{n+1} \subseteq A_n$ e, analogamente ao que foi feito acima, tem-se $v_0 \in A_{n+1}$, $diam(A_{n+1}) \leq (1/2)diam(A_n))$ e $2v_0 - w \in A_{n+1}$ para todo $w \in A_{n+1}$. Temos então uma sequência de subconjuntos de V

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \ldots$$

tais que $v_0 \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} diam(A_n) = 0$, temos $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{v_0\}$.

Sendo f uma isometria, temos $A_0(v_1, v_2) = A_0(f(v_1), f(v_2))$. Segue então, por indução, que $f(A_n(v_1, v_2) = A_n(f(v_1), f(v_2))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n(v_1, v_2)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f(A_n(v_1, v_2)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n(f(v_1), f(v_2)),$$

ou seja, $f((1/2)(v_1 + v_2)) = (1/2)(f(v_1) + f(v_2))$, para quaisquer v_1, $v_2 \in V$. Particularmente, tomando $v_2 = 0_V$, temos $f((1/2)v_1) = (1/2)f(v_1)$ para todo $v_1 \in V$. Segue então que $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ para quaisquer v_1, $v_2 \in V$. Observando agora que toda isometria é uma função contínua e usando o lema anterior, concluímos a demonstração. $\square$

Corolário 4.10 *Sejam V um espaço vetorial real normado, então $Isom(V)$ é o produto semidireto de $\mathcal{T}(V)$ por $\mathcal{IL}(V)$.*

Demonstração. Como já sabemos que $\mathcal{T}(V) \cap \mathcal{IL}(V) = \{Id_V\}$ e que $\mathcal{T}(V)$ é um subgrupo normal de $Isom(V)$, resta mostrar que toda isometria de V é a composta de uma translação com uma isometria linear. De fato, sendo $f \in Isom(V)$ e $a = f(0_V)$, considere $g = T_{-a} \circ f$. Observe que g é uma isometria de V tal que $g(0_V) = 0_V$, donde g é uma isometria linear de V. Logo, $f = T_a \circ g$ é a composta de uma translação com uma isometria linear. $\square$

Exemplo 4.11 (Isometrias do plano) Considere o espaço vetorial real $I\!R^2$ e o seu produto interno canônico $<,>: I\!R^2 \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R$, o qual é definido por

$$<(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Observe que a norma usual de $I\!R^2$ (veja o Exemplo 4.2) é exatamente a norma proveniente deste produto interno. Observe também que a métrica induzida por esta norma é exatamente a métrica d definida no Exemplo 2.3. Denotando o espaço métrico $(I\!R^2, d)$ simplesmente por $I\!R^2$, vamos descrever o grupo $\mathcal{IL}(I\!R^2)$. Sendo $f \in GL(I\!R^2)$, tomemos a, b, c, $d \in I\!R$ tais que $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, ou seja,

$$[f] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

onde $[f]$ denota a matriz de f em relação à base canônica de $I\!R^2$. Como foi mostrado na Proposição 4.5, $f \in Isom(I\!R^2)$ se, e somente se, $\|f(v)\|^2 = \|v\|^2$ para todo $v \in I\!R^2$, ou seja,

$$(a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 = x^2 + y^2$$

para quaisquer x, $y \in I\!R$. Esta última afirmação equivale a

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \quad \text{e} \quad ab + cd = 0 \tag{1}$$

e assim concluímos que $f \in Isom(I\!R^2)$ se, e somente se, $[f] \in O_2(I\!R)$.

Vamos agora caracterizar o grupo $O_2(I\!R)$. Segue de (1) que existe $\theta \in I\!R$ tal que $a = Cos\,\theta$ e $c = Sen\,\theta$. Além disso, $a^2b^2 + c^2b^2 = b^2$ e daí, como $ab = -cd$, $c^2 = c^2(b^2 + d^2) = b^2$. Logo, $b = \pm c$. Temos então que

$$O_2(I\!R) = \left\{ \begin{pmatrix} Cos\,\theta & -nSen\,\theta \\ Sen\,\theta & nCos\,\theta \end{pmatrix} \middle|\ \theta \in I\!R,\ n = \pm 1 \right\}.$$

Sabe-se que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, munido da multiplicação usual de números complexos, é um grupo (o grupo multiplicativo dos números compexos), e que $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ é um subgrupo de $\mathbb{C}^*$.

$$\begin{array}{rccl} \psi: & DC & \longrightarrow & O_2(I\!R) \\ & (n, a + bi) & \longmapsto & \psi(n, a + bi) = \begin{pmatrix} a & nb \\ -b & na \end{pmatrix} \end{array}$$

é um isomorfismo.

Exemplo 4.12 Considerando o subconjunto $S = \{(x, |Sen\ x|) \mid x \in I\!R\}$ do plano, vamos descrever o grupo $G = \{g \in Isom(I\!R^2) \mid g(S) = S\}$. Sendo $\rho,\ \tau : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$, definidas por $\rho(x,y) = (-x,y)$ e $\tau(x,y) = (x+\pi, y)$, verifica-se facilmente que $\rho,\ \tau \in G_1$. Tomando $g \in G$, temos $g = T_{v_0} \circ f$, com $v_0 = (a,b) \in I\!R^2$ e $f \in IL(I\!R^2)$. Como $g(S) = S$, devemos ter $f(S) = T_{-v_0}(S) \subseteq I\!R \times [-b, 1-b]$, uma vez que $S \subseteq I\!R \times [0,1]$. Do exemplo anterior sabemos que

$$[f] = \begin{pmatrix} Cos\,\theta & Sen\,\theta \\ -kSen\,\theta & kCos\,\theta \end{pmatrix}$$

onde $\theta \in I\!R$ e $k = \pm 1$. Como $(n\pi, 0) \in S$, temos que $(n\pi Cos\,\theta, -kn\pi Sen\,\theta) \in S$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e daí devemos ter $Sen\,\theta = 0$. Segue então que $[f]$ é uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Supondo que $[f]$ seja igual uma das duas últimas, temos $f(x,y) = (a+x, b-|Sen\ x|)$ ou $f(x,y) = (a-x, b-|Sen\,x|)$.

Exemplo 4.13 Considere a função $h : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por $h(x) = (x-n)^2$ para $n \leq x < n+1$ e $n \in \mathbb{Z}$, e $S_1 = \{(x, h(x)) \mid x \in I\!R\}$ (gráfico de h). Vamos agora descrever o grupo $G_1 = \{g \in Isom(I\!R^2) \mid g(S_1) = S_1\}$. Primeiramente, observe que a aplicação $\phi : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$, definida por $\phi(x,y) = (x+1, y)$, pertence ao grupo G_1, e assim $\{\phi^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq G_1$. Mostremos agora que $G_1 = \{\phi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Usando um raciocínio análogo ao do exemplo anterior podemos mostrar que se $g \in G_1$, então $g = T_{v_0} \circ f$, onde $v_0 = (a,b)$ e f é uma isometria linear tal que $[f]$ é uma das matrizes de (2).

Exemplo 4.14 Considerando no espaço vetorial real $I\!R^2$ a norma $\|\|_s$, definida no Exemplo 4.4, vamos descrever o grupo $\mathcal{IL}(I\!R^2, \|\|_s)$. Tomando

$$\begin{aligned} G = \Bigg\{ &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg\} \end{aligned} \tag{3}$$

temos que G é um subgrupo de $GL_n(I\!R)$ isomorfo ao grupo D_4. Sendo $f \in GL(I\!R^2)$, não é difícil ver que se $[f] \in G$, então $f \in \mathcal{IL}(I\!R^2, \|\|_s)$.

Supondo agora $f \in \mathcal{IL}(I\!R^2, \|\|_s)$, tomemos a, b, c, $d \in I\!R$ tais que $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$. Como $\|f(v)\|_s = \|v\|_s$ para todo $v \in I\!R^2$, considerando particularmente $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (1,1)$ e $v_4 = (1,-1)$, temos as seguintes igualdades:

$$|a| + |c| = |b| + |d| = 1 \quad \text{e} \quad |a+b| + |c+d| = |a-b| + |c-d| = 2.$$

Segue destas igualdades que $|a+b|+|c+d| = |a|+|b|+|c|+|d|$, e assim, como $|a+b| \leq |a|+|b|$ e $|c+d| \leq |c|+|d|$, devemos ter

$$|a+b| = |a|+|b| \quad \text{e} \quad |c+d| = |c|+|d|$$

e daí $|a-b| \leq |a+b|$ e $|c-d| \leq |c+d|$. Usando agora a igualdade $|a+b|+|c+d| = |a-b|+|c-d|$, concluímos que $|a-b| = |a+b|$ e $|c-d| = |c+d|$, donde segue que a ou b é igual a 0 e c ou d é igual a 0. Logo, $[f] \in G$, e assim $\mathcal{IL}(I\!R^2, \|\|_s)$ é isomorfo a G, e consequentemente isomorfo ao grupo D_4.

5 Isometrias e formas bilineares

Sejam K um corpo e V um K-espaço vetorial.

Definição 5.1 *Seja V um K-espaço vetorial. Definimos uma forma bilinear sobre V como sendo uma aplicação $f : V \times V \longrightarrow K$ que satisfaz as seguintes condições:*
a) $f(u_1+u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$ para quaisquer u_1, u_2, $v \in V$;
b) $f(u, v_1+v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$ para quaisquer u, v_1, $v_2 \in V$;
c) $f(\lambda u, v) = f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$ para quaisquer u, $v \in V$ e $\lambda \in K$.

Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Sendo $f : V \times V \longrightarrow K$ uma forma bilinear, considere a matriz

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{onde} \quad a_{ij} = f(v_i, v_j).$$

Esta matriz é chamada de *matriz de f em relação à base β* e satisfaz $f(u, v) = [u]_\beta^t [f]_\beta [v]_\beta$ para quaisquer u, $v \in V$, onde $[u]_\beta$ e $[v]_\gamma$ denotam as matrizes-coluna de coordenadas de u e v, respectivamente, em relação à base β.

Considere agora γ uma base ordenada qualquer de V. Sabemos que a *matriz de mudança de base de γ para β*, denotada por $[I]_\beta^\gamma$, é uma matriz inversível e satisfaz $[v]_\beta = [I]_\beta^\gamma [v]_\gamma$ para todo $v \in V$. Dados u $v \in V$, temos que

$$f(u, v) = [u]_\gamma^t [f]_\gamma [v]_\gamma \quad \text{e} \quad f(u, v) = [u]_\beta^t [f]_\beta [v]_\beta = [u]_\gamma^t ([I]_\beta^\gamma)^t [f]_\beta [I]_\beta^\gamma [v]_\gamma.$$

Como u e v são arbitrários, devemos ter $[f]_\gamma = ([I]_\beta^\gamma)^t [f]_\beta [I]_\beta^\gamma$. Segue da última igualdade que $[f]_\beta$ é inversível se, e somente se, $[f]_\gamma$ é inversível.

Sendo $\dim V$ finita e $f : V \times V \longrightarrow K$ uma forma bilinear, dizemos que f é *não-degenerada* se $[f]_\beta$ é inversível para alguma (e consequentemente para toda) base β de V.

Definição 5.2 *Seja* (V, f) *um* K*-espaço vetorial munido de uma forma bilinear. Definimos uma isometria de* (V, f) *como sendo um operador linear bijetor então* $T : V \longrightarrow V$ *tal que* $f(T(u), T(v)) = f(u, v)$ *para quaisquer* $u,\ v \in V$.

Exemplo 5.3 Observe que se f é uma forma bilinear qualquer sobre V, então Id_V é uma isometria de (V, f).

Exemplo 5.4 Sendo V um espaço vetorial real de dimensão finita e $<,> : V \times V \longrightarrow I\!R$ um produto interno em V, verifica-se que $<,>$ é uma forma bilinear não-degenerada. Observe que as isometrias de $(V, <,>)$ são exatamente as isometrias do espaço vetorial normado $(V, \|\ \|)$, onde $\|\ \|$ é a norma de V proveniente do produto interno $<,>$.

Sendo (V, f) um K-espaço vetorial munido de uma forma bilinear, considere o subconjunto $Isom(V, f) = \{T \in GL(V) \mid T$ é isometria de $(V, f)\}$ do $GL(V)$. Pelo Exemplo 5.3 temos que $Isom(V, f)$ é não vazio. Ademais, se $T,\ S \in Isom(V, f)$, então

$$f((ST)(u), (ST)(v)) = f(S(T(u)), S(T(v))) = f(T(u), T(v)) = f(u, v)$$

para quaisquer $u,\ v \in V$. Ademais,

$$f(T^{-1}(u), T^{-1}(v)) = f(T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(v))) = f(u, v)$$

para quaisquer $u,\ v \in V$. Segue então que ST e T^{-1} pertence a $Isom(V, f)$, e assim $Isom(V, f)$ é um subgrupo de $GL(V)$, chamado de *grupo das isometrias de* (V, f).

Vamos agora fazer um estudo, em termos de matrizes, de isometrias de (V, f). Comecemos observando que sendo A uma matriz $n \times n$ com entradas em K, o conjunto

$$G(A) = \{X \in GL_n(K) \mid X^t A X = A\}$$

é um subgrupo de $GL_n(K)$. Observe que se $A = I_n$, a matriz identidade $n \times n$, então $G(A) = \{X \in GL_n(K) \mid X^t I_n X = I_n\} = \{X \in GL_n(K) \mid X^{-1} = X^t\} = O_n(K)$ (grupo ortogonal).

Seja β uma base arbitrária de V. Para $T \in GL(V)$ e $u,\ v \in V$, temos que

$$f(u, v) = [u]^t_\beta [f]_\beta [v]_\beta \quad \text{e} \quad f(T(u), T(v)) = [T(u)]^t_\beta [f]_\beta [T(v)]_\beta = [u]^t_\beta [T]^t_\beta [f]_\beta [T]_\beta [v]_\beta.$$

Logo, $T \in Isom(V, f)$ se, e somente se, $[T]^t_\beta [f]_\beta [T]_\beta = [f]_\beta$. Assim,

$$Isom(V, f) = \{T \in GL(V) \mid [T]_\beta \in G([f]_\beta)\}$$

e portanto podemos definir a aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & Isom(V, f) & \longrightarrow & G([f]_\beta) \\ & T & \longmapsto & F(T) = [T]_\beta \end{array}.$$

Não é difícil ver que F é um isomorfismo de grupos.

Exemplo 5.5 Considere o K-espaço vetorial K^n e a forma bilinear $f : K^n \times K^n \longrightarrow K$ definida por

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Sendo β a base canônica de K^n, temos $[f]_\beta = I_n$ e assim $Isom(K^n, f)$ é um grupo isomorfo a $G(I_n) = O_n(K)$.

No caso particular $n = 2$ e $K = I\!R$, temos que f é o produto interno canônico do $I\!R^2$ (veja o Exemplo 4.11), donde $Isom(I\!R^2, f)$ é exatamente o $Isom(I\!R^2)$ das isometrias lineares do plano. Isto confirma o fato já demonstrado de que o grupo das isometrias lineares do plano é isomorfo ao grupo ortogonal $O_2(I\!R)$.

Definição 5.6 *Dizemos que uma forma bilinear $f : V \times V \longrightarrow K$ é:*
a) Simétrica se $f(u, v) = f(v, u)$ para quaisquer u, $v \in V$.
b) Anti-simétrica se $f(u, v) = -f(v, u)$ para quaisquer u, $v \in V$.

Supondo $\dim V$ finita, observa-se facilmente que uma forma bilinear f sobre V é simétrica se, e somente se, $[f]_\beta$ é uma matriz simétrica para toda base β de V. O próximo teorema é um importante resultado sobre "diagonalização" de formas bilineares simétricas.

Teorema 5.7 *Se K tem característica diferente de 2, dimensão de V é finita e $f : V \times V \longrightarrow K$ é uma forma bilinear simétrica, então existe alguma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $[f]_\beta$ é uma matriz diagonal, ou seja, $f(v_i, v_j) = 0$ para $i \neq j$.*

Demonstração. Veja [4], pg 471. □

Corolário 5.8 *Se K é um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2, dimensão de V é finita e $f : V \times V \longrightarrow K$ é uma forma bilinear simétrica não-degenerada, então $Isom(V, f)$ é isomorfo a $O_n(K)$, onde $n = \dim V$.*

Demonstração. Sendo $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V tal que $[f]_\beta$ é diagonal, tomemos $a_i = f(v_i, v_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Como f é não-degenerada, temos $0 \neq \det[f]_\beta = a_1a_2 \ldots a_n$, e assim $a_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Tomando agora $\lambda_i \in K$ tal que $\lambda_i^2 = a_i$ e $u_i = \lambda_i^{-1}v_i$, para $1 \leq i \leq n$, temos que $\gamma = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de V e $[f]_\gamma = I_n$. Temos então o resultado. □

Veremos no próximo exemplo que o corolário anterior não é válido sem a hipótese do corpo K ser algebricamente fechado.

Exemplo 5.9 Considere V um espaço vetorial real de dimensão 2 e β uma base de V. Sendo f a forma bilinear sobre V tal que $[f]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, temos $Isom(V, f)$ isomorfo a $G([f]_\beta)$.

Tomando
$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
temos que $X \in G([f]_\beta)$ se, e somente se,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
ou seja,
$$a^2 - c^2 = b^2 - d^2 = 1 \quad \text{e} \quad ab = cd.$$
Logo,
$$G([f]_\beta) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ mc & ma \end{pmatrix} \,\middle|\, a, c \in \mathbb{R},\ a^2 - c^2 = 1,\ m = \pm 1 \right\}.$$
Cálculos simples mostram que se $X \in G([f]_\beta)$, então os dois autovalores de X são reais. Supondo então que $X \in G([f]_\beta)$ satisfaz $X^3 = I_2$, temos que os dois autovalores de X são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 1$ e assim esses dois autovalores são iguais a 1, o que nos dá $X = I_2$. Com isso concluímos que $G([f]_\beta)$, e consequentemente $Isom(V, f)$, não pode ser isomorfo a $O_2(\mathbb{R})$, uma vez que no grupo $O_2(\mathbb{R})$ existe elemento $A \neq I_2$ tal que $A^3 = I_2$.

Referências

[1] H. P. Bueno, *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Textos Universitários - SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[2] P. D. Lax, *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[3] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides - IMPA, 2ª. Edição, 1983.

[4] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra Linear*, 2ª. Edição, LTC, 1979.

[5] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[6] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Allyn and Bacon Inc., 3ª. Edição, Newton, Massachusetts, 1984.