

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - CCET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DMAT
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - PET

Probabilidade Condicional
com ênfase sobre o evento condicionante

Marconio Silva dos Santos
Julho de 2007

Sumário

Introdução	1
1 Probabilidade Condicional	2
1.1 Probabilidade condicional como função de B	2
1.2 O modelo binomial para preço de ações	4
Referências Bibliográficas	8

Introdução

Este trabalho tem como objetivo fazer uma abordagem da probabilidade condicional, enfatizando a importância do evento B quando calculamos $P(A|B)$, ou seja, a probabilidade de A dada a ocorrência de B . Aqui, mostraremos a probabilidade condicional como função que depende também do evento dado, aquele que condiciona a probabilidade procurada e que chamamos aqui de evento condicionante. É recomendável que o leitor tenha algum conhecimento prévio de probabilidade para que possa compreender melhor a natureza dos conceitos expostos neste trabalho. Gostaria também de agradecer ao Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, por sua participação neste trabalho, na condição de orientador.

Capítulo 1

Probabilidade Condicional

1.1 Probabilidade condicional como função de B

Inicialmente, damos a definição de probabilidade condicional, a fim de nortear nosso estudo.

Definição 1 *Sejam dois eventos A e B tais que $P(B) > 0$. Define-se a probabilidade condicional de A dado B , representada por $P(A|B)$, como sendo*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Se $P(B) = 0$, decretamos $P(A|B) = 0$.

Na maioria dos livros básicos de probabilidade, encontra-se a demonstração de que a probabilidade condicional é uma função de probabilidade, se fixamos o evento B . Mostraremos agora que, fixado um evento A , a relação $P(A| \cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ é uma função, isto é, a probabilidade condicional $P(A|B)$ também é uma função de B .

Seja $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Se $P(B) = 0$, então $P(A|B) = 0$, por definição. Isto significa que B possui uma única imagem pela relação $P(A| \cdot)$. Porém, se $P(B) > 0$, pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Como P é uma probabilidade, os eventos $A \cap B$ e B possuem uma única imagem pela função P , e cada uma destas é maior que ou igual a zero. Logo, existe um único número real a tal que

$$0 \leq a = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$

Além disso,

$$(A \cap B) \subset B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1.$$

Como o evento $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ que consideramos foi qualquer, podemos afirmar que, fixado um evento $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, a relação

$$\begin{aligned} P(A| \cdot) : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ B &\longmapsto P(A|B) \end{aligned}$$

é uma função.

Assim, temos uma função $P(A| \cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ que, da definição de probabilidade condicional, possui as seguintes propriedades:

1. Se $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ é tal que $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0$. Em particular se $B = A^C$.

De fato, se B é tal que $P(B) = 0$, então $P(A|B) = 0$, por definição. Se, porém, $P(B) > 0$, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0. \quad \blacksquare$$

2. Se $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ é tal que $A \subset B$ e $P(B) > 0$, então $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$. Em particular se $B = \Omega$, temos $P(A|\Omega) = P(A)$.

De fato, $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$. Portanto,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}. \quad \blacksquare$$

3. Se $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ é tal que $B \subset A$ e $P(B) > 0$, então $P(A|B) = 1$. Em particular se $B = A$.

De fato, $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$. Portanto,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1. \quad \blacksquare$$

Exemplo 1 Considere o terceiro lançamento de uma moeda honesta. Temos então o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\},$$

onde C representa “cara” e K representa “coroa”. Assim, temos $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, com $P(\omega) = \frac{1}{8}, \forall \omega \in \Omega$. Consideremos, agora, o evento $A = \{\text{sair cara no terceiro lançamento}\}$, isto é, $A = \{CCC, CKC, KCC, KKC\}$. Queremos calcular $P(A|B)$, com $P(B) > 0$.

Se, por exemplo, $B = \{CCC, CCK, CKC, CKK\}$, a ocorrência de B significa ter saído cara no primeiro lançamento. Assim,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{CCC, CCK, CKC, CKK\}) \\ &= P(\{CCC\} \cup \{CCK\} \cup \{CKC\} \cup \{CKK\}) \\ &= P(\{CCC\}) + P(\{CCK\}) + P(\{CKC\}) + P(\{CKK\}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{CCC, CKC\})}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Note que o valor de $P(A|B)$ é influenciado pelo valor de $P(B)$ e também pelo de $P(A \cap B)$; este último depende dos elementos de $A \cap B$.

Agora, consideremos $D = \{KCK, KKK\}$, ou seja, ter saído coroa no primeiro e no terceiro lançamento. Assim,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(\{KCK, KKK\}) = P(\{KCK\} \cup \{KKK\}) \\ &= P(\{KCK\}) + P(\{KKK\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Calculemos então $P(A|D)$:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\emptyset)}{P(D)} = \frac{0}{1/2} = 0.$$

Neste caso, também temos a influência de $P(D)$ e de $P(A \cap D)$ sobre o valor de $P(A|D)$. Assim é possível perceber que, fixado um evento A qualquer, a probabilidade deste, dado qualquer outro evento B , dependerá também desse evento dado. ■

1.2 O modelo binomial para preço de ações

Agora, fazemos algumas considerações sobre o *modelo binomial para preço de ações*. Estas considerações também nos ajudarão a perceber a importância do evento B quando queremos calcular a probabilidade condicional de A dado B .

O modelo binomial para preço de ações estabelece uma ferramenta eficiente para entender a arbitragem da teoria do preço e teoria da probabilidade. No modelo binomial para preço de ações, nós modelamos grupos de ações em tempo discreto, supondo que em cada passo o preço do grupo de ações mudará para um entre dois valores possíveis.

Comecemos com um preço inicial positivo S_0 do grupo de ações. Há dois números positivos, d e u , com

$$0 < d < u,$$

tais que no próximo período, o preço do grupo de ações será ou dS_0 ou uS_0 . Consideramos d e u satisfazendo $0 < d < 1 < u$; assim, mudar o preço do grupo de ações de S_0 para dS_0 representa um movimento *decrecente*, e mudar o preço do grupo de ações de S_0 para uS_0 representa um movimento *crescente*. Naturalmente, os movimentos dos preços do grupo de ações são muito mais complexos do que está indicado no modelo binomial para preço de ações. Nesse modelo binomial podemos desenvolver a teoria das probabilidades condicionais.

Apresentamos aqui uma notação para o modelo binomial um pouco diferente daquela geralmente encontrada. Imaginemos que estamos lançando uma moeda e quando obtemos uma “cara”, o preço do grupo de ações sobe, mas quando obtemos uma “coroa”, o preço diminui. Denotaremos o preço no tempo 1 por $S_1(C) = uS_0$ se o lançamento resulta em cara (C), e por $S_1(K) = dS_0$ se o lançamento resulta em coroa (K). Depois do segundo lançamento, o preço será um dentre os seguintes valores:

$$S_2(CC) = uS_1(C) = u^2S_0,$$

$$S_2(CK) = dS_1(C) = duS_0,$$

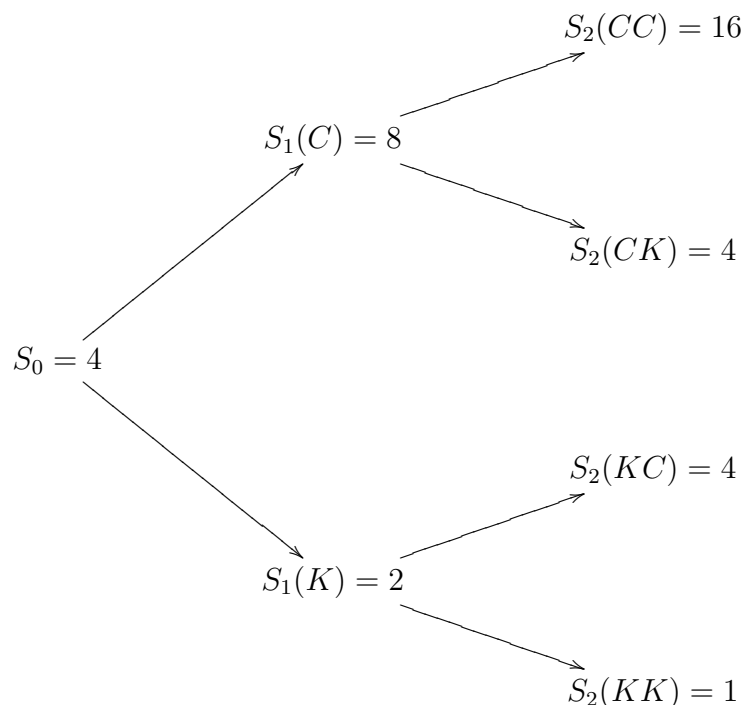
$$S_2(KC) = uS_1(K) = udS_0,$$

$$S_2(KK) = dS_1(K) = d^2S_0.$$

Depois de três lançamentos, haverá oito seqüências possíveis com as faces da moeda, embora nem todas resultem em diferentes preços para o grupo de ações no tempo 3. No momento, supomos que o terceiro lançamento é o último e denotamos por

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\}$$

o conjunto de todos os possíveis resultados dos três lançamentos.



Árvore binomial dos preços do grupo de ações com $S_0 = 4$, $u = \frac{1}{d} = 2$.

Ilustramos essas considerações no seguinte exemplo:

Exemplo 2 Considere o preço de um grupo de ações no tempo 2 (S_2), com $S_0 = 10$, $u = 1,2$ e $d = 0,8$. Suponha que a chance de crescimento e de decréscimo do preço das ações são sempre iguais. Qual a probabilidade do preço do grupo de ações ser 11,52 no tempo 3 se o preço das ações teve decréscimo no tempo 2? e se o preço das ações teve crescimento e decréscimo nos tempos 1 e 2, respectivamente?

Fazendo analogia com três lançamentos de uma moeda honesta, temos para o terceiro lançamento, isto é, para o tempo 3, os seguintes possíveis resultados:

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\},$$

onde C representa “cara” e K representa “coroa”, considerando, também, C como crescimento e K como decréscimo.

Note que, neste caso, não queremos a probabilidade de se obter C ou K no terceiro lançamento e sim do preço do grupo de ações no tempo 3. Note também que

$$S_3(CCK) = dS_2(CC) = duS_1(C) = du^2S_0 = 11,52$$

e, como o produto de números reais é comutativo, temos também:

$$S_3(CKC) = 11,52 \quad \text{e} \quad S_3(KCC) = 11,52.$$

Assim, o evento do qual queremos calcular a probabilidade é $A = \{CCK, CKC, KCC\}$.

Inicialmente vamos calcular a probabilidade do preço do grupo de ações ser 11,52 se o preço das ações teve decréscimo no tempo 2. Para isso, consideremos o seguinte evento:

$$B = \{CKC, CKK, KKC, KKK\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8}.$$

Logo,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{CKC\})}{P(B)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}.$$

Agora, calculemos $P(A|D)$, em que D significa crescimento e decréscimo nos tempos 1 e 2, respectivamente, isto é,

$$D = \{CKC, CKK\} \Rightarrow P(D) = \frac{2}{8}.$$

Logo,

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\{CKC\})}{P(D)} = \frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}.$$

■

Através desse último exemplo, é possível compreender melhor a importância do evento dado na probabilidade condicional. Nesse exemplo, o evento B informava o que havia acontecido no tempo 2, já o evento D informava sobre os tempos 1 e 2, dando assim mais informações. Podemos notar que essas informações influenciaram na probabilidade que procurávamos. Imaginemos esse grupo de ações no tempo 50. Poderemos saber mais sobre seu valor no tempo 50 se soubermos o que aconteceu durante o percurso, ou seja, quanto mais informações temos sobre os passos antecedentes, melhor sabemos sobre os valores que o grupo de ações poderá assumir no tempo 50. Logo, o evento dado, contendo essas informações, influencia a probabilidade condicional.

Referências Bibliográficas

- [1] MAGALHÃES, Marcos Nascimento. Conceitos Básicos de Probabilidade. In: _____. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2005. cap 1.
- [2] SHREVE, Steven E. Introduction to Probability Theory. In: _____. *Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance*. Carnegie Mellon University, 1996. cap 1.